PART3　不等式の表す領域の面積

例題

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2-4$，$y \leqq x+2$，$y \leqq -2x-1$ の表す領域を図示せよ。

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ。

Point Pickup

練習

⑴　連立不等式 $y \geqq x^2-1$，$y \leqq x+1$，$y \geqq -x-1$ の表す領域を図示せよ。

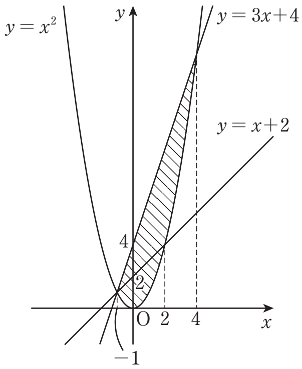
⑵　⑴の領域の面積 S を求めよ。

第 18 講　PART3 確認問題

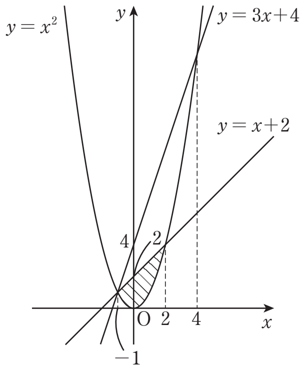
1　連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \geqq x+2$，$y \leqq 3x+4$ の表す領域を①～④から選べ。ただし領域は，図の斜線部分を表し，境界線を含む。

領域 [ア]

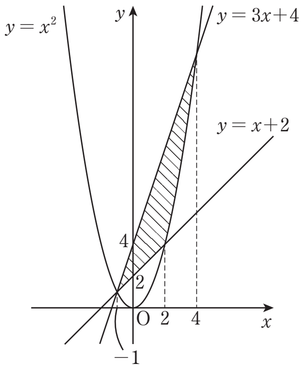
①



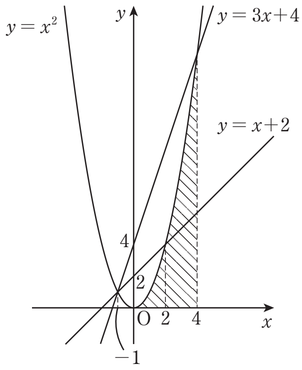
②



③



④



2　連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \geqq x+2$，$y \leqq 3x+4$ の表す領域の面積 S を求めよ。

$S=\dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エ}}$

PART3　不等式の表す領域の面積

例題

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2-4$，$y \leqq x+2$，$y \leqq -2x-1$ の表す領域を図示せよ。

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-4$ …… ①，$y=x+2$ …… ②，$y=-2x-1$ …… ③とすると

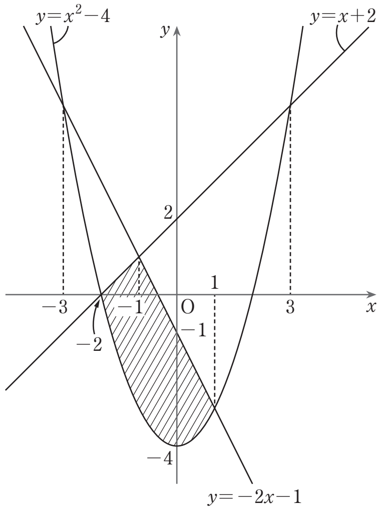
①と②の交点の x 座標は　$x=-2,\ 3$

①と③の交点の x 座標は　$x=-3,\ 1$

②と③の交点の x 座標は　$x=-1$

よって，連立不等式の表す領域は右図斜線部分。

ただし，境界線を含む。



(2)　$S=\int_{-2}^{-1}\{(x+2)-(x^2-4)\}dx$

$$+\int_{-1}^{1}\{(-2x-1)-(x^2-4)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+x+6)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2-2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)+\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-\left(\frac{1}{3}-1-3\right)=\frac{15}{2}$$

練習

(1) 連立不等式 $y \geqq x^2-1$，$y \leqq x+1$，$y \geqq -x-1$ の表す領域を図示せよ。

(2) (1)の領域の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2-1$ …… ①，$y=x+1$ …… ②，$y=-x-1$ …… ③ とすると

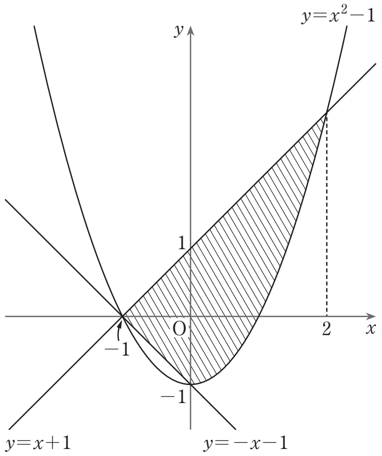
①と②の交点の x 座標は　$x=-1,\ 2$

①と③の交点の x 座標は　$x=-1,\ 0$

②と③の交点の x 座標は　$x=-1$

よって，連立不等式の表す領域は右図斜線部分。

ただし，境界線を含む。



(2) $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{(x+1)-(-x-1)\}dx$

$\displaystyle+\int_{0}^{2}\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^{0}(2x+2)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+x+2)dx$

$=\Big[x^2+2x\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2x\Big]_{0}^{2}$

$=(0+0)-(1-2)+\left(-\dfrac{8}{3}+2+4\right)-(0+0+0)=\dfrac{13}{3}$

第18講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③

[解説]

$y=x^2$　……①，$y=x+2$　……②，

$y=3x+4$　……③　とすると [A]

それぞれのグラフの交点の x 座標は

①，②より　$x^2=x+2$　$x^2-x-2=0$

$x=-1,\ 2$

①，③より　$x^2=3x+4$　$x^2-3x-4=0$

$x=-1,\ 4$

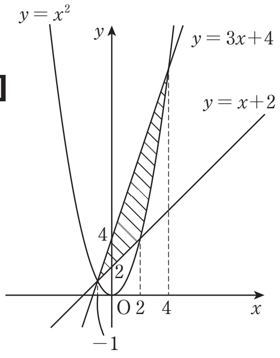
②，③より　$x+2=3x+4$

$x=-1$

よって，連立不等式の表す領域は右図の斜線部分。 [B]

ただし，境界線を含む。

したがって　③



[A]　連立不等式の表す領域を図示する手順

それぞれの不等式が表す領域の共通部分を図示する。手順は以下。

① それぞれの不等式が表す領域の境界線を図示する。
② ①の境界線に「共有点」があれば，その座標を求め，図に書き込む。
③ それぞれの不等式が表す領域を考え，その「共通部分」に斜線を入れる。
④ 領域に境界線を含むか含まないかを明記する。

[B]

不等式 $y \geqq f(x)$ の表す領域

……曲線 $y=f(x)$ の上側の部分

（境界線 $y=f(x)$ を含む）

不等式 $y \leqq f(x)$ の表す領域

……曲線 $y=f(x)$ の下側の部分

（境界線 $y=f(x)$ を含む）

2 [正解] イウ：49，エ：3

[解説]

$y=x^2$　……①，$y=x+2$　……②，

$y=3x+4$　……③　とすると

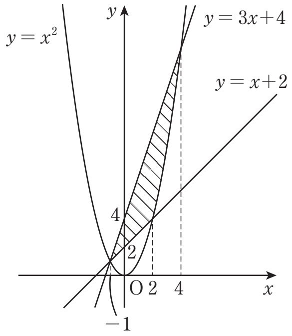
①と②のグラフの交点の x 座標は　$x=-1,\ 2$

①と③のグラフの交点の x 座標は　$x=-1,\ 4$

②と③のグラフの交点の x 座標は　$x=-1$

よって，連立不等式の表す領域は右図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(3x+4)-(x+2)\}dx+\int_{2}^{4}\{(3x+4)-x^2\}dx$$ [C]

$$=\int_{-1}^{2}(2x+2)dx+\int_{2}^{4}(-x^2+3x+4)dx$$

$$=\Big[x^2+2x\Big]_{-1}^{2}+\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\Big]_{2}^{4}$$

$$=\{(4+4)-(1-2)\}+\left\{\left(-\frac{64}{3}+24+16\right)-\left(-\frac{8}{3}+6+8\right)\right\}$$

$$=\frac{49}{3}$$

> [C]　不等式の表す領域の面積
> 不等式が表す領域を図示し
> 区間 $a\leqq x\leqq b$ において，
> 常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき
> $S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$
> を用いて面積を求める。